Feuille de TD

Applications linéaires, Décomposition de Dunford algorithmique

Applications linéaires

Exercice 1. On considère $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y, x-2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(\{0\})$. f est-elle injective ?
3. Déterminer l'image $f(\mathbb{R}^3)$ de f. f est-elle surjective ?

Exercice 2.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$. On définit un endomorphisme φ de E par $\varphi(e_1) = -e_1 + 2e_3$, $\varphi(e_2) = e_2 + 2e_3$ et $\varphi(e_3) = 2e_1 + 2e_2$.

1. Donner l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\ker \varphi$ et $\operatorname{Im} \varphi$.

Exercice 3.
Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que $\ker u \subset \ker(v \circ u)$ et que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.

Exercice 4.
Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Vérifier que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Déterminer l'image de f.
4. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Soit $\mathcal{B}' = (1, X-1, (X-1)(X-2))$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Exercice 5.
Soit E, F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker u$ dans E. Montrer que l'application $g: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \operatorname{Im} u \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}$ est un isomorphisme.

Exercice 6. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tel que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.
2. Si E est de dimension finie, en déduire que f est une homothétie (c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lambda x$).
   On pourra commencer l'étude en dimension 1 puis 2.
3. Montrer que le résultat est toujours vrai en dimension infinie.
   On pourra considérer deux éléments $x, y \in E$ et comparer λ_x et λ_y selon que (x,y) est liée ou libre.

Exercice 7.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base et une équation cartésienne de $\operatorname{Ker} f$.
2. Déterminer une base et un système d'équations cartésiennes de $\operatorname{Im} f$.
3. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im} f$ et en déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f n'a qu'un coefficient non nul.
4. En déduire une matrice P telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, on se donne deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E. Soit $\mathcal{C}$ une base de F.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire sur E. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}}(u)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}}(u)$, exprimer B en fonction de A et de la matrice de passage $P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) \subset \mathrm{Ker}\,(u^2)$ et $\mathrm{Im}\,u^2 \subset \mathrm{Im}\,u$.
2. Montrer l'équivalence
$$\mathrm{Ker}\,(u^2) = \mathrm{Ker}\,(u) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,(u) \cap \mathrm{Im}\,u = \{0\}.$$
3. Montrer l'équivalence
$$\mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{Im}\,u \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,(u) + \mathrm{Im}\,u = E.$$
4. Supposons que E est de dimension finie. Montrer que
$$\mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,u = E \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}\,(u^2) = \mathrm{Ker}\,(u) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\,u^2 = \mathrm{Im}\,u.$$

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit
$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

1. Calculer $\phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
2. En déduire $\mathrm{Ker}\,(\phi)$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}\,\phi$.

Exercice 11. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + u - 2\mathrm{Id}_E = 0$.

1. Montrer que u est inversible et calculer u^{-1}.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}\,(u + 2\mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.
3. Montrer que $(u - \mathrm{Id}_E) \circ (u + 2\mathrm{Id}_E) = (u + 2\mathrm{Id}_E) \circ (u - \mathrm{Id}_E) = 0$.
4. En écrivant $x = \frac{1}{3}(u(x) + 2x) - \frac{1}{3}(u(x) - x)$, montrer que $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(u + 2\mathrm{Id}_E) = E$.

Exercice 12.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $x_0, \ldots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ différents deux à deux. En étudiant l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), \ldots, P(x_n)) \end{array}$, montrer que pour tout $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme L de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $L(x_i) = y_i$.
2. Soient a, b, c trois réels distincts et soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(a) = \alpha$, $P(b) = \beta$, $P(c) = \gamma$ et $P'(c) = \delta$.

Exercice 13. Soit $u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme défini par :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = xe_1 + ye_2 + ze_3 - \frac{x+y+z}{3}\,u.$$

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f.
Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$.
3. Montrer que l'ensemble des vecteurs $v \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(v) = v$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
4. Montrer que f est un projecteur. Sur quel sous-espace vectoriel, parallèlement à quel sous-espace vectoriel ?
5. Trouver une matrice P inversible telle que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Déterminer $\mathrm{Ker}\,(u)$ et $\mathrm{Im}\,u$.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et u, $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'on a équivalence entre :

(i) $u \circ v = u$ et $v \circ u = v$;

(ii) u et v sont des projecteurs et $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Ker}(v)$.

Exercice 16. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$, montrer que $(x, f(x), f^2(x))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Exprimer la matrice de f dans cette base.

Dev : Décomposition de Jordan-Chevalley (Dunford) algorithmique

Exercice 17. Soit $n \geq 1$. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{K}$.
On veut montrer qu'il existe deux matrices $D, N \in M_p(\mathbb{K})$ avec D diagonalisable, N nilpotente, $DN = ND$, telles que $A = D + N$, et que cette décomposition est unique.
De plus, de telles matrices D, N sont des polynômes en A : $D, N \in \mathbb{K}[A]$. On va pour cela construire N et D via une suite de matrices (on obtiendra le résultat en un nombre fini d'étapes).

1. (a) Soient $M, N, N' \in M_p(\mathbb{K})$ avec N, N' nilpotentes, et M, N, N' qui commutent entre elles.
   Montrer que MN et $N + N'$ sont nilpotentes.

   (b) Soient U une matrice inversible, N une matrice nilpotente, telles que $UN = NU$.
   Montrer que $U - N$ est inversible.
2. (a) Soit $R(X) = pgcd(\chi_A(X), \chi_A'(X))$. On pose $P = \frac{\chi_A}{R}$.
   En utilisant la décomposition de χ_A en éléments irréductibles, montrer que P est scindé à racines simples.
   Donner la décomposition en éléments irréductibles de P.

   (b) Montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + VP' = 1$. On s'aidera de la décomposition de P, et d'un diviseur commun.

   (c) Montrer que $P(A)$ est nilpotent.
   On pose r le premier entier positif tel que $P(A)^r = 0$.

   (d) Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.
   Dans $\mathbb{K}[X, Y]$, montrer qu'il existe $\tilde{Q} \in \mathbb{K}[X, Y]$ tel que $Q(X + Y) = Q(X) + YQ'(X) + Y^2\tilde{Q}(X, Y)$.
   On pourra utiliser la linéarité.
3. On introduit la suite $(A_n)_n$ par $A_0 = A$, et $A_{n+1} = A_n - P(A_n)P'(A_n)^{-1}$ (si cela existe).
4. Montrer que pour tout $n \geq 0$, la matrice A_n existe, que $A_n \in \mathbb{K}[A]$, qu'il existe $B_n \in \mathbb{K}[A]$ telle que $P(A_n) = P(A)^{2^n} B_n$, et que $P'(A_n)$ est inversible.
5. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que $P(A_n) = 0$, $\forall n \geq n_0$.
6. Montrer que la suite $(A_n)_n$ est stationnaire àpcr.
7. Montrer que A_{n_0} est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.
8. Montrer que $A_{n_0} - A$ est nilpotente.
   On pourra utiliser un télescopage.
9. Obtenir une décomposition $A = D + N$ telle qu'énoncée initialement.
   Combien d'éléments de la suite faut-il calculer pour obtenir cette décomposition ?
10. Montrer que cette décomposition est unique.